# ResolSysteme (0.1.5), version « pyluatex »

## 1 Préambule, avec le package pyluatex

```
\documentclass[french,a4paper,10pt]{article}
\usepackage[margin=1.5cm]{geometry}
\usepackage[executable=python.exe]{pyluatex}
\usepackage[pyluatex]{ResolSysteme}          %version pyluatex, lua + shell-escape
\usepackage{systeme}
\sisetup{locale=FR,output-decimal-marker={,}}
```

## 2 Affichage d'une matrice, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

```
On considère les matrices $A=\AffMatrice(1,2 § 3,4)$
et $B=\AffMatrice[n](-1,-1/3,4 § 1/3,4,-1 § -1,0,0)$
et $C=\AffMatrice(1,2,3,4 § 5,6,7,0 § 1,1,1,1 § 2,-3,-5,-6)$.
```

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & -{}^{1}/{}_{3} & 4 \\ {}^{1}/{}_{3} & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

## 3 Déterminant d'une matrice, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

```
Le déterminant de $A=\AffMatrice(1,2 § 3,4)$ est
$\det(A)=\DetMatricePY(1,2 § 3,4)$.
```

Le déterminant de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $\det(A)=-2$.

```
Le déterminant de $A=\AffMatrice(-1,0.5 § -1/2,4)$ est
$\det(A)=\DetMatricePY[dec](-1,0.5 § -1/2,4)$.
```

Le déterminant de $A=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$ est $\det(A)=-3{,}75$.

```
Le dét. de $A=\begin{pNiceMatrix} -1&\frac13&4 \\ \frac13&4&-1 \\ -1&0&0 \end{pNiceMatrix}$ est
$\det(A) \approx \DetMatricePY[dec=3](-1,1/3,4 § 1/3,4,-1 § -1,0,0)$.
```

Le dét. de $A=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 4 \\ \frac{1}{3} & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $\det(A)\approx 16{,}333$.

```
Le dét. de $A=\begin{pNiceMatrix} 1&2&3&4\\5&6&7&0\\1&1&1&1\\2&-3&-5&-6 \end{pNiceMatrix}$
est $\det(A)=\DetMatricePY(1,2,3,4 § 5,6,7,0 § 1,1,1,1 § 2,-3,-5,-6)$.
```

Le dét. de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ est $\det(A)=24$.

## 4 Calculs avec des matrices, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

```
$\ProduitMatricesPY(1,2)(3 § 4)[Aff]$ et $\ProduitMatricesPY(1,2)(3,4 § 5,6)[Aff]$ \\
$\ProduitMatricesPY(-5,6 § 1,4)(2 § 7)[Aff]$ et $\ProduitMatricesPY(-5,6 § 1,4)(2,-4 § 7,0)[Aff]$
```

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 30 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 20 \\ 30 & -4 \end{pmatrix}$

```
$\ProduitMatricesPY(1,2,3)(4 § 5 § 6)[Aff]$ et $\ProduitMatricesPY(1,2,3)(1,1,1 § 2,1,5 §
    0,5,-6)[Aff]$\\
$\ProduitMatricesPY(1,1,1 § 2,1,5 § 0,5,-6)(1 § 2 § 3)[Aff]$ et
$\ProduitMatricesPY(1,1,1 § 2,1,5 § 0,5,-6)(1,2,3 § -5,-4,2 § 3,3,10)[Aff]$
```

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & -7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 16 \\ 12 & 15 & 59 \\ -43 & -38 & -45 \end{pmatrix}$

```
$\ProduitMatricesPY(1,2,3,4)(5 § 6 § 7 § 8)[Aff]$\\
$\ProduitMatricesPY(1,2,3,4)(1,1,1,5 § 2,1,5,6 § 0,5,-6,0 § 1,-5,4,2)[Aff]$\\
$\ProduitMatricesPY(1,1,1,5 § 2,1,5,6 § 0,5,-6,0 § 1,-5,4,2)(1 § 2 § 3 § 4)[Aff]$\\
$\ProduitMatricesPY(1,1,1,5 § 2,1,5,6 § 0,5,-6,0 § 1,-5,4,2)(1,5,4,0 § 2,-1,-1,5 § 3,0,1,2, §
    4,6,9,10)[Aff]$
```

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 9 & 25 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 43 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 34 & 49 & 57 \\ 43 & 45 & 66 & 75 \\ -8 & -5 & -11 & 13 \\ 11 & 22 & 31 & 3 \end{pmatrix}$

```
$\MatricePuissancePY(1,1 § 5,-2)(7)[Aff]$\\
$\MatricePuissancePY(1,1,-1 § 5,-2,1 § 0,5,2)(3)[Aff]$ \\
$\MatricePuissancePY(1,1,1,1 § 5,-2,1,5 § 0,5,2,-1 § 0,1,1,1)(5)[Aff]$
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} -559 & 673 \\ 3\,365 & -2\,578 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -24 & 8 & -16 \\ 65 & -58 & 9 \\ 25 & 70 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 886 & 769 & 769 & 913 \\ 1\,730 & 847 & 1\,090 & 1\,655 \\ 1\,395 & 1\,865 & 1\,622 & 1\,565 \\ 720 & 625 & 625 & 742 \end{pmatrix}$$

## 5 Inverse d'une matrice, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

```
L'inverse de $A=\begin{pNiceMatrix} 1&2 \\ 3&4 \end{pNiceMatrix}$ est
$A^{-1}=\MatriceInversePY<cell-space-limits=2pt>(1,2 § 3,4)$.
```

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

```
L'inverse de $A=\begin{pNiceMatrix} 1&2 \\ 3&4 \end{pNiceMatrix}$ est
$A^{-1}=\MatriceInversePY*<cell-space-limits=2pt>(1,2 § 3,4)$.
```

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \tfrac{3}{2} & \tfrac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

```
L'inverse de $A=\begin{pNiceMatrix} 1&2 \\ 3&6 \end{pNiceMatrix}$ est
$A^{-1}=\MatriceInversePY<cell-space-limits=2pt>(1,2 § 3,6)$.
```

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} =$ Matrice non inversible.

```
L'inverse de $A=\begin{pNiceMatrix} 1&2 \\ 3&4 \end{pNiceMatrix}$ est
$A^{-1}=\MatriceInversePY[d]<cell-space-limits=2pt>(1,2 § 3,4)$.
```

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

```
L'inverse de $A=\begin{pNiceMatrix} 1&2&3\\4&5&6\\7&8&8 \end{pNiceMatrix}$ est
$A^{-1}=\MatriceInversePY<cell-space-limits=2pt>(1,2,3 § 4,5,6 § 7,8,8)$.
```

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\tfrac{8}{3} & \tfrac{8}{3} & -1 \\ \tfrac{10}{3} & -\tfrac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

```
L'inverse de $A=\begin{pNiceMatrix} 1&2&3\\4&5&6\\7&8&8 \end{pNiceMatrix}$ est
$A^{-1}=\MatriceInversePY*<cell-space-limits=2pt>(1,2,3 § 4,5,6 § 7,8,8)$.
```

L'inverse de $A=\begin{pmatrix} 1&2&3\\4&5&6\\7&8&8 \end{pmatrix}$ est $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & \frac{-13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

```
L'inverse de $A=\begin{pNiceMatrix} 1&2&3&4\\5&6&7&0\\1&1&1&1\\2&-3&-5&-6 \end{pNiceMatrix}$
est $A^{-1}=\MatriceInversePY[n]<cell-space-limits=2pt>(1,2,3,4 § 5,6,7,0 § 1,1,1,1 § 2,-3,-5,-6)$.
```

L'inverse de $A=\begin{pmatrix} 1&2&3&4\\5&6&7&0\\1&1&1&1\\2&-3&-5&-6 \end{pmatrix}$ est $A^{-1}=\begin{pmatrix} {}^{5}/_{8} & {}^{1}/_{24} & -{}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{3} \\ -{}^{17}/_{8} & -{}^{5}/_{24} & {}^{9}/_{2} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{11}/_{8} & {}^{7}/_{24} & -{}^{7}/_{2} & {}^{1}/_{3} \\ {}^{1}/_{8} & -{}^{1}/_{8} & {}^{1}/_{2} & 0 \end{pmatrix}$.

## 6 Résolution d'un système, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

```
La solution de $\systeme{-9x-8y=-8,3x-6y=-7}$ est $\mathcal{S}=%
\left\lbrace \SolutionSystemePY(-9,-8 § 3,-6)(-8,-7) \right\rbrace$.
```

La solution de $\begin{cases} -9x-8y=-8 \\ 3x-6y=-7 \end{cases}$ est $\mathcal{S}=\left\lbrace\left(-\tfrac{4}{39};\tfrac{29}{26}\right)\right\rbrace$.

```
La solution de $\systeme{x+2y=-5,4x+8y=1}$ est $\mathcal{S}=%
\left\lbrace \SolutionSystemePY(1,2 § 4,8)(-5,1) \right\rbrace$.
```

La solution de $\begin{cases} x+2y=-5 \\ 4x+8y=1 \end{cases}$ est $\mathcal{S}=\{\text{Matrice non inversible}\}$.

```
La solution de $\systeme{-9x-8y=-8,3x-6y=-7}$ est $\mathcal{S}=%
\left\lbrace \SolutionSystemePY[d](-9,-8 § 3,-6)(-8,-7) \right\rbrace$.
```

La solution de $\begin{cases} -9x-8y=-8 \\ 3x-6y=-7 \end{cases}$ est $\mathcal{S}=\left\lbrace\left(-\dfrac{4}{39};\dfrac{29}{26}\right)\right\rbrace$.

```
La solution de $\systeme{x+y+z=-1,3x+2y-z=6,-x-y+2z=-5}$ est $\mathcal{S}=%
\left\lbrace \SolutionSystemePY(1,1,1 § 3,2,-1 § -1,-1,2)(-1,6,-5) \right\rbrace$.
```

La solution de $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 3x+2y-z=6 \\ -x-y+2z=-5 \end{cases}$ est $\mathcal{S}=\{(2;-1;-2)\}$.

```
La solution de $\systeme{x+y+z=-1,3x+2y-z=-5,-x-y+2z=0}$ est donnée par $X=%
\SolutionSystemePY*[d]<cell-space-limits=2pt>(1,1,1 § 3,2,-1 § -1,-1,2)(-1,-5,0)[Matrice]$.
```

La solution de $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=-1 \\ 3x+2y-z=-5 \\ -x-y+2z=0 \end{array}\right.$ est donnée par $X=\begin{pmatrix} -4 \\ \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{-1}{3} \end{pmatrix}$.

```
La solution de $\systeme[xyzt]{y+z+t=1,x+z+t=-1,x+y+t=1,x+y+z=0}$ est $\mathcal{S}=%
\left\lbrace\SolutionSystemePY[d](0,1,1,1 § 1,0,1,1 § 1,1,0,1 § 1,1,1,0)(1,-1,1,0)\right\rbrace$.
```

La solution de $\left\{\begin{array}{l} y+z+t=1 \\ x+z+t=-1 \\ x+y+t=1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$ est $\mathcal{S}=\left\{\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

```
La solution de $\systeme[xyzt]{x+2y+3z+4t=-10,5x+6y+7z=0,x+y+z+t=4,-2x-3y-5z-6t=7}$ est $X=
\SolutionSystemePY
    [dec]<cell-space-limits=2pt>
    (1,2,3,4 § 5,6,7,0 § 1,1,1,1 § -2,-3,-5,-6)(-10,0,4,7)
    [Matrice]$
```

La solution de $\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z+4t=-10 \\ 5x+6y+7z=0 \\ x+y+z+t=4 \\ -2x-3y-5z-6t=7 \end{array}\right.$ est $X=\begin{pmatrix} 17{,}75 \\ -12{,}75 \\ -1{,}75 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$

# 7 État probabiliste d'un graphe probabiliste, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

```
État initial : $P_0 = \AffEtatProb[t](1/3,2/3)$.

Matrice de transition :
$M=\AffMatrice[dec](0.75,0.25 § 0.9,0.1)$

État à l'instant 5 :
$P_5 \approx \EtatProbPY[dec=3](1/3,2/3)%
        (0.75,0.25 § 0.9,0.1)
        (5)$
```

État initial : $P_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Matrice de transition : $M=\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

État à l'instant 5 : $P_5 \approx \begin{pmatrix} 0{,}783 & 0{,}217 \end{pmatrix}$

```
État initial : $P_0 = \AffEtatProb[dec](0.33,0.52,0.15)$.

Matrice de transition :
$M=\AffMatrice[dec]%
(0.1,0.2,0.7 § 0.25,0.25,0.5 § 0.15,0.75,0.1)$

État à l'instant 7 :
$P_7 \approx \EtatProbPY[dec=3]
        (0.33,0.52,0.15)%
        (0.1,0.2,0.7 § 0.25,0.25,0.5 § 0.15,0.75,0.1)
        (7)$
```

État initial : $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}52 & 0{,}15 \end{pmatrix}$.

Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}15 & 0{,}75 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

État à l'instant 7 : $P_7 \approx \begin{pmatrix} 0{,}184 & 0{,}432 & 0{,}384 \end{pmatrix}$

```
État initial : $P_0 = \AffEtatProb[dec](0.33,0.52,0.15,0)$.

Matrice de transition :
$M=\AffMatrice[dec]%
        (0.1,0.2,0.3,0.4 § 0.25,0.25,0.25,0.25 § 0.15,0.15,0.2,0.5 § 0.3,0.3,0.2,0.2)$

État à l'instant 4 :
$P_4 \approx \EtatProbPY[dec=3]
        (0.33,0.52,0.15,0)%
        (0.1,0.2,0.3,0.4 § 0.25,0.25,0.25,0.25 § 0.15,0.15,0.2,0.5 § 0.3,0.3,0.2,0.2)%
        (4)$
```

État initial : $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}52 & 0{,}15 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

État à l'instant 4 : $P_4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}211 & 0{,}232 & 0{,}233 & 0{,}324 \end{pmatrix}$

## 8 État stable d'un graphe probabiliste, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

```
L'état stable du gr. prob. de matrice
$M=\AffMatrice[dec](0.72,0.28 § 0.12,0.88)$

est $\Pi = \EtatStablePY[d](0.72,0.28 § 0.12,0.88)$
ou $\Pi = \EtatStablePY[dec](0.72,0.28 § 0.12,0.88)$.
```

L'état stable du gr. prob. de matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}28 \\ 0{,}12 & 0{,}88 \end{pmatrix}$

est $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$ ou $\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

```
L'état stable du gr. prob. de matrice
$M=\AffMatrice[dec](0.9,0.03,0.07 § 0.30,0.43,0.27 § 0.14,0.07,0.79)$

est $\Pi = \EtatStablePY[d](0.9,0.03,0.07 § 0.30,0.43,0.27 § 0.14,0.07,0.79)$
ou $\Pi = \EtatStablePY[dec](0.9,0.03,0.07 § 0.30,0.43,0.27 § 0.14,0.07,0.79)$.
```

L'état stable du gr. prob. de matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}3 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix}$

est $\Pi = \begin{pmatrix} \dfrac{63}{100} & \dfrac{7}{100} & \dfrac{3}{10} \end{pmatrix}$ ou $\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}63 & 0{,}07 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

```
L'état stable du gr. prob. de matrice
$M=\AffMatrice[dec](0.1,0.2,0.3,0.4 § 0.25,0.25,0.25,0.25 § 0.15,0.15,0.2,0.5 § 0.3,0.3,0.2,0.2)$

est $\Pi \approx \EtatStablePY[dec=5](0.1,0.2,0.3,0.4 § 0.25,0.25,0.25,0.25 § 0.15,0.15,0.2,0.5 §
    0.3,0.3,0.2,0.2)$.
```

L'état stable du gr. prob. de matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

est $\Pi \approx \begin{pmatrix} 0{,}211\,23 & 0{,}232\,35 & 0{,}232\,74 & 0{,}323\,68 \end{pmatrix}$.